

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 23 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2016**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 63.

A2. i. Λ, ii. Σ, iii. Σ, iv. Σ, v. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. $A = \frac{x^3 \cdot y^{-6} \cdot x^{-2} y^{-1}}{y^{-7} : (-y)} = \frac{x^1 \cdot y^{-7}}{\frac{-y^{-7}}{y}} = -xy = -2017 \cdot \left(-\frac{1}{2017}\right) = 1.$

B2.i. $\frac{x+1}{y+1} = x \Leftrightarrow x+1 = x(y+1) \Leftrightarrow x+1 = xy+x \Leftrightarrow xy=1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$

Άρα x και y είναι αντίστροφοι.

ii. $A = \frac{x^{18} \cdot y^{20}}{x^{-2} \cdot 1^{2015}} = x^{20} \cdot y^{20} = (xy)^{20} = 1^{20} = 1.$

B3.i. $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+1) = (\alpha^2-1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+1) = (\alpha^4-1)(\alpha^4+1) = \alpha^8-1.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{x^2+x} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2+x} = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x(x+1)} =$

$= \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} \cdot \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2}.$

B $= \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} : \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = 1$

Γ2.i. Έστω ότι $(\alpha^2+\beta^2) \cdot (x^2+y^2) \geq (\alpha x+\beta y)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 \geq \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha y - \beta x)^2 \geq 0$ ισχύει.

ii. Έστω ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha + 2\beta + 10 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (\beta^2 + 2\beta + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 + (\beta + 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha + 2\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 + (\beta + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 3 = 0 \text{ και } \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ και } \beta = -1$$

iii. Έστω $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha$.

Άρα $\alpha > 1$

και $\alpha^2 > \alpha$ (πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη)

$$\alpha \cdot \alpha^2 > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 > \alpha.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i. $2 < x < 3 \Leftrightarrow 4 < 2x < 6 \Leftrightarrow -6 < -2x < -4$ (1)

$$4 < y < 5 \Leftrightarrow 12 < 3y < 15$$
 (2)

$$(1) + (2): -6 + 12 < -2x + 3y < -4 + 15 \Leftrightarrow 6 < 3y - 2x < 11.$$

ii. Είναι $6 < 3y - 2x < 11$ (από την (1))

και $4 < y < 5$ (από υπόθεση)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$24 < (3y - 2x) < 55 \Leftrightarrow 24 < 3y^2 - 2xy < 55.$$

iii. $4 < y < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{y} < -\frac{1}{5}$.

Επομένως

$$2 < x < 3$$

$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{y} < -\frac{1}{5}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{7}{4} < x - \frac{1}{y} < \frac{14}{5}$$

Δ2. Είναι $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

και $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για το $x - 1$ και το $2 - x$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x-1	-	0	+	+
2-x	+	+	0	-

- Αν $x \in (-\infty, 1)$ τότε

$$A = 2(-x+1) - (2-x) \Leftrightarrow A = -2x + \cancel{2} - \cancel{2} + x \Leftrightarrow A = -x.$$

- Αν $x \in [1, 2]$ τότε

$$A = 2(x-1) - (2-x) \Leftrightarrow A = 2x - 2 - 2 + x \Leftrightarrow A = 3x - 4.$$

- Αν $x \in (2, +\infty)$ τότε

$$A = 2(x-1) - (-2+x) \Leftrightarrow A = 2x - \cancel{2} + \cancel{2} - x \Leftrightarrow A = x.$$

$$\text{Επομένως } A = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \in (-\infty, 1) \\ 3x+1, & \text{αν } x \in [1, 2] \\ x, & \text{αν } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta 3. \quad d(x, -3) \geq 2 &\Leftrightarrow |x+3| \geq 2 \Leftrightarrow x+3 \leq -2 \text{ ή } x+3 \geq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \leq -5 \text{ ή } x \geq -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty) \end{aligned}$$

ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ - ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΣ

SCIENCE PRESS Στοιχειθεσίες επιστημονικών κειμένων τηλ. 6974547422