ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
& ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1 Σχολικό βιβλίο σελ. 260
Α2 Σχολικό βιβλίο σελ. 169
Α3 Σχολικό βιβλίο σελ. 280
Α4 α – λάθος, β – λάθος, γ – σωστό, δ – λάθος, ε – λάθος.

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. • $D_f = (1,5) \cup (5,9]$ (πεδίο ορισμού)
• $f(A) = (-2,5]$ (σύνολο τιμών)

Β2.α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$.

β) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2 \end{array}\right\}$ Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$.

δ) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \end{array}\right\}$ Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = 3$.

Β3.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ και f(x) < 0 για x < 2 και f(x) > 0 για x > 2.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$ και f(x) > 0 για κάθε $x \in (5,6) \cup (6,7)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 5$. Θέτουμε f(x) = t.

άρα $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x)) = \lim\limits_{t\to 5} f(t) = 3$.

Β4. Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ του πεδίου ορισμού της γιατί $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει (από Β2)

και $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ δεν υπάρχει (από Β2).

Β5. Τα σημεία x_o στα οποία ισχύει $f'(x_o) = 0$ είναι τα $x_o = 4$, $x_o = 6$ και $x_o = 8$ (εσωτερικά του D_f) γιατί η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά (υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη) και παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και συνεχής στο $x_o = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς "1-1".

Είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Άρα $D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$.

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$

Συνεπώς $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$

Γ2. Είναι $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

και $h''(x) = -\eta\mu x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Από πρόταση του σχολικού βιβλίου ισχύει:

$|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα αληθεύει μόνο για x = 0.

Για x > 0 είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Άρα $x - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow h''(x) > 0$ για κάθε x > 0.

Συνεπώς η $h'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα για x > 0 $\overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$.

Επομένως η h(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα για $x > 0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$.

Γ3. Είναι $y(t) = x^3(t)$

Άρα $y'(t) = \left(x^3(t)\right)' = 3x^2(t)\cdot x'(t)$, $t \geq 0$ (1)

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_o ισχύει $y'(t_o) = x'(t_o)$.

Από (1) έχουμε $\cancel{y'(t_o)} = 3x^2(t_o)\cdot \cancel{x'(t_o)} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2(t_o) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_o) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_o) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{ή} \\ x(t_o) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\text{απορ.}) \end{cases}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)$, δηλαδή $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ (2)

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) = g(x)$ (3)

γιατί η g είναι άρτια συνάρτηση.

Είναι $I = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)dx \overset{(2)}{\underset{(3)}{=}} \int_{-1}^{1} -f(-x)\cdot g(-x)dx = \int_{-1}^{1} f(-x)\cdot g(-x)(-dx)$.

Θέτουμε $-x = \omega \Rightarrow d(-x) = d\omega \Rightarrow -dx = d\omega$

Αν $x = -1$ τότε $\omega = 1$.

Αν $x = 1$ τότε $\omega = -1$.

Άρα $I = \int_{1}^{-1} f(\omega)\cdot g(\omega)d\omega = -\int_{-1}^{1} f(\omega)\cdot g(\omega)d\omega = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = 1 + \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x} = 1 + \frac{0}{1} = 1.$

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

• f(1) = 1.

Επομένως η f είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 1$.
Επίσης η f είναι συνεχής στα διαστήματα (0,1) και $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Άρα η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

Συνεπώς $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = (-\infty)+1 = -\infty$.

Άρα η ευθεία x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f.

Δ2.• Για 0 < x < 1 είναι $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}+1-1}{x-1} = \frac{\ln x}{x(x-1)} = \frac{\ln x}{x^2-x}$.

Άρα $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x^2-x} \underset{DLH}{\overset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = 1$ (1)

• Για x > 1 είναι $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \frac{\ln x - x+1}{(x-1)^2}$.

Άρα

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x+1}{(x-1)^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, ενώ είναι συνεχής. Άρα το $x_o = 1$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της f.
Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,1) με

$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}+1\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ και στο διάστημα $(1,+\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

Άρα το $x_o = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3.i)• Για $x\in(0,1)$ είναι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ (γιατί είναι συνεχής)

Επομένως $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ (εσωτερικό σημείο) και η f είναι γνησίως αύξουσα η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1).

• Για x = 1 $\quad f(1) = 1 \neq 0$.

• Για x > 1 $\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (απορ.)

Άρα η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο (0,+∞) που βρίσκεται στο διάστημα (0,1).

ii) Στο Δ_3(i) βρήκαμε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία ρίζα $x_o \in (0,1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ ισχύει:

$x_o \le x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_o) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1$.

Επομένως

$$E = \int_{x_o}^{1} f(x)dx = \int_{x_o}^{1}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)dx = \int_{x_o}^{1}[\ln x(\ln x)' + 1]dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} + x\right]_{x_o}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{\ln^2 x_o}{2} - x_o \quad (1)$$

Όμως $f(x_o) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x_o}{x_o} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_o = -x_o \quad (2)$

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$E = 1 - \frac{(-x_o)^2}{2} - x_o = 1 = 1 - \frac{x_o^2}{2} - x_o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{-x_o^2 - 2x_o + 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. Για x > 1 είναι $f'(x) = \dfrac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = F''(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = x - 1 - x\ln x,\ x \ge 1$.

Είναι $K'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x < 0$ για κάθε x > 1.

Άρα η K(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Συνεπώς για $x > 1 \overset{K\downarrow}{\Leftrightarrow} K(x) < K(1) \Leftrightarrow K(x) < 0$.

Επομένως είναι $f'(x) = \dfrac{K(x)}{x(x-1)^2} < 0$ για κάθε x > 1.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, συνεπώς η F είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$.

• Για $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x$.

Ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,x^2]$. Άρα υπάρχουν $x_1 \in (1,x)$ και $x_2 \in (x,x^2)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$F'(x_1) = \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \quad \text{και} \quad F'(x_2) = \frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$$

Όμως $1 < x_1 < x < x_2 < x^2$ και F' γνησίως φθίνουσα, αφού η F είναι κοίλη.

Έτσι $x_1 < x_2 \overset{F'\downarrow}{\Leftrightarrow} F'(x_1) > F'(x_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{F(x)-F(1)}{\cancel{x-1}} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x(\cancel{x-1})} \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} xF(x)-xF(1) > F(x^2)-F(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)F(x) > xF(1)+F(x^2).$$

ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ – ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΣ